

# **Työ 31A VAIHTOVIRTAPIIRI**

## **Pari 1**

Jonas Alam  
Antti Tenhiälä

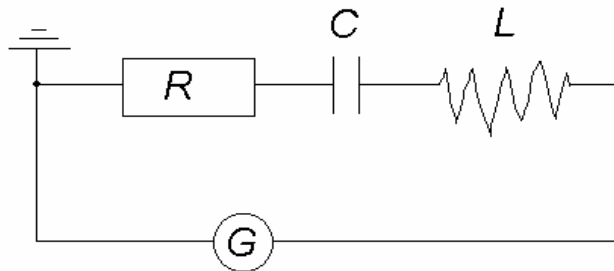
Selostuksen laati: Jonas Alam

Mittaukset tehty: 10.3.2000  
Selostus jätetty: 17.3.2000

# 1. Johdanto

Tasavirtapiirissä sähkövirta ja jännite käyttäytyvät selvästi eri tavalla kuin vaihtovirtapiirissä, jossa on olennaisena erona tasavirtapiiriin mm. jaksollisuus ja siihen liittyvä taajuus ja vaihe-ero.

Työn tarkoituksena on määrittää vaihtovirtapiirin käämin induktanssin, itseinduktion, keskinäisinduktion ja käämien kytkentäkertoimen arvot. Mittauksissa käytimme vaihtovirtapiirissä vastusta, kuutta erikapasitanssista kondensaattoria ja kahta eri käämiä.



## 2. Laitteisto ja menetelmät

Työssä käytettiin seuraavanlaista kytkentää.

Kuviossa R on vastus, C on kondensaattori, L on käämi ja vaihtojännitelähde G on signaaligeneraattori.

Ensimmäisenä mitattiin erään L:n ja C:n arvoilla piirin resonanssitaajuus kymmenen toistomittauksen avulla, jotta taajuuden virherajat saadaan määritettyä. Taajuudet luettiin impulssimittarista, ja resonanssitaajuus voitiin havaita oskilloskoopista. Oskilloskoopin x-poikkeutus on kytketty jännitelähteen napojen välille ja y-poikkeutus vastuksen päihin, koska vastuksen yli oleva jännite on samassa vaiheessa koko piirissä kulkevan virran kanssa. Oskilloskoopille piirtyy ellipsi, jonka parametrimuotoinen yhtälö on (1)

$$x = x_0 \sin(\omega t)$$

$$y = y_0 \sin(\omega t - \phi)$$

Piirin resonanssitaajuudeksi kutsutaan sitä taajuutta, jolla piirissä kulkee suurin mahdollinen virta, ja oskilloskoopin ruudulla tämä näkyy ellipsin supistumisena suoraksi.

Vaihtovirtapiirille pätee

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (1)$$

ja (2)

$$Z = \frac{V}{I}.$$

Ratkaisemalla yhtälöparista virta I, saadaan (3)

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

joka saa suurimman arvonsa, kun nimittäjä saa pienimmän arvonsa, eli kun neliöjuuressa oleva neliölauseke saa arvon nolla. Tämä tapahtuu kun, (4)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Seuraavaksi mitattiin resonanssitaajuuDET kaikilla kondensaattorien 1-6 ja kahden käämin yhdistelmällä virran molempiin suuntiin. Tämän jälkeen laitettiin kytkentäkaavion L:n paikalle molemmat käämit ja mitattiin resonanssitaajuuDET, kun käämeissä kulkee samaan suuntaan ja vastakkaisiin suuntiin. Näiden tietojen avulla on määritettävissä käämienvälinen keskinäisinduktanssi ja kytkentäkerroin.

### 3. Tulokset

Toistokoemittaus, jossa etsittiin resonanssitaajuus piirille, jossa on kondensaattori, jonka kapasitanssi on 12,1 nF, ja käämi 1. Saatiin seuraavat tulokset:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f (kHz)	7,910	7,467	7,461	7,560	7,570	7,946	7,718	7,564	7,600	7,510

Frekvenssien aritmeettiseksi keskiarvoksi saadaan  $f=7,631$  kHz. Keskiarvon keskivirhe voidaan nyt laskea sijoittamalla mitatut frekvenssit kaavaan (4)

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

missä N on mittausten lukumäärä. Saadaan

$$\Delta \bar{f} = \sqrt{\frac{(7,910 - 7,631)^2 + (7,467 - 7,631)^2 + (7,461 - 7,631)^2 + \dots + (7,600 - 7,631)^2 + (7,510 - 7,631)^2}{10 \cdot (10 - 1)}}$$

Ja frekvenssin f keskiarvon keskivirheeksi (68%:n luottamusväli) tulee  $\pm 0,055$  kHz.

## Induktanssi

Seuraava taulukko osoittaa mittaustulokset resonanssitaajuudesta molempien käämien ja kuuden eri kondensaattorin yhdistelmille:

C (nF)	3,36	12,1	33,4	104	345	970
f(L1) (kHz)	14,230	7,429	4,580	2,460	1,278	0,630
f(L2) (kHz)	12,204	6,586	3,982	2,264	1,214	0,600

Kulmanopeus muutetaan frekvenssiksi jakamalla  $2\pi$ :llä. Näin saadaan (4):n nojalla induktanssille kaava (5)

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C}$$

Sijoittamalla ylemmän taulukon arvot, saadaan Induktansseille arvot:

C	1	2	3	4	5	6
L1 (mH)	37,23	37,93	36,15	40,25	44,95	65,79
L2 (mH)	50,62	48,26	47,83	47,52	49,82	72,54

Mittauksista, joissa on käytetty kondensaattoria 6, on saatu huomattavasti erilaisia tuloksia kuin muista mittauksista. Tämän takia jätetään ko. mittaustulokset laskujen ulkopuolelle. Erilaiset mittaustulokset voivat johtua esimerkiksi virheestä kapasitanssin 6 arvossa.

Induktanssien virherajat lasketaan (5):n osittaisdifferentiaalilla avulla.

$$\Delta L = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2\Delta f}{C \cdot f^3} + \frac{\Delta C}{C^2 \cdot f^2} \right)$$

Saadaan käämeille 1 ja 2 arvot:

$$L1 = (39,30 \pm 3,37) \text{ mH} \approx (39,3 \pm 3,4) \text{ mH}$$

$$L2 = (48,81 \pm 0,60) \text{ mH} \approx (48,8 \pm 0,6) \text{ mH}$$

Seuraavaksi tehdään samat mittaukset ja laskut toisella virran kulkusuunnalla kuin edellä.

C (nF)	3,36	12,1	33,4	104	345	970	
f(L1) (kHz)	14,150	7,467	4,481	2,486	1,395	0,882	
f(L2) (kHz)	12,160	6,553	3,934	2,190	1,173	0,745	

C	1	2	3	4	5	6
L1 (mH)	37,65	37,55	37,77	39,41	37,73	33,57
L2 (mH)	50,98	48,75	49,00	50,78	53,36	47,05

Ja saadaan käämien 1 ja 2 arvoiksi: (kun taas kondensaattorin 6 tulokset jätetään samasta syystä huomiotta)

$$L1 = (38,02 \pm 0,35) \text{ mH} \approx (38,0 \pm 0,4) \text{ mH}$$

$$L2 = (50,57 \pm 0,83) \text{ mH} \approx (50,6 \pm 0,8) \text{ mH}$$

### Keskinäisinduktanssi

Kun vaihtovirtapiiriin laitetaan molemmat käämit sarjaan, indusoituu käämiin jännite (6)

$$U_+ = i\omega(L_1 + L_2 + 2M)I = i\omega L_+ I$$

ja kun virran kiertosuunta on vastakkainen, on indusoituneen jännitteen arvo (7)

$$U_- = i\omega(L_1 + L_2 - 2M)I = i\omega L_- I$$

Ratkaisemalla (6):sta ja (7):stä saadaan keskinäisinduktanssiksi (8)

$$M = \frac{1}{4}(L_+ - L_-).$$

Seuraavassa taulukossa on mittaustulokset, jossa molemmat käämit ovat kytkettynä sarjaan vaihtovirtapiiriin ja piirin resonanssitaajuus on mitattu kuudella eri kapasitanssilla. Rivillä L+ on käämeissä samaan virran kiertosuuntaan oleva resonanssitaajuus ja rivillä L- on käämeissä vastakkaiseen suuntaan oleva resonanssitaajuus.

C (nF)	3,36	12,1	33,4	104	345	970
f(L+) (kHz)	9,617	5,064	3,047	1,806	0,816	0,343
f(L-) (kHz)	8,942	4,779	2,861	1,592	0,859	0,440

Ratkaistaan L+ ja L- kaavan (5) avulla:

C (nF)	3,36	12,1	33,4	104	345	970
L+ (mH)	81,51	81,63	81,69	74,67	110,27	221,96

L- (mH)	94,28	91,66	92,65	96,10	99,50	134,88
---------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

Aritmeettiset keskiarvot virherajoiheen: (kun kondensaattorin 6 mittauksia ei huomioida)

$$L_+ = (85,95 \pm 6,23) \text{ mH}$$

$$L_- = (94,84 \pm 1,39) \text{ mH}$$

Nyt voidaan laskea keskinäisinduktanssi kaavan (8) avulla:

$$M = 0,25 * (85,95 - 94,84) \text{ mH} = -2,22 \text{ mH}$$

Ja virherajat osittaisdifferentiaalilla (8):sta:

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{1}{4}(\Delta L_+ + \Delta L_-) \\ &= 0,25 * (6,23 + 1,39) \text{ mH} = 1,91 \text{ mH} \end{aligned}$$

Keskinäisinduktanssin arvoksi saadaan siis

$$\mathbf{M = (-2,22 \pm 1,91) \text{ mH} \approx \mathbf{(-2,2 \pm 1,9) \text{ mH}}$$

## KytKentäkerroin

KytKentäkerroin  $k$ , kuvaa käämien kytKennän löyhyyttä tai tiukkuutta.  $k$  voi saada arvoja nollan ja yhden väliltä. Jos  $k \approx 1$ , ovat käämit tiukasti kytKettyinä toisiinsa. KytKentäkerroin riippuu käämien induktansseista ja niiden välisestä keskinäisinduktanssista, seuraavan kaavain mukaisesti (9)

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \pm \Delta k$$

ja virherajat saadaan (9):n osittaisdifferentiaalista

$$\Delta k = \frac{|M|}{2\sqrt{L_1 L_2}} \left( \frac{2\Delta M}{|M|} + \frac{\Delta L_2}{L_2} + \frac{\Delta L_1}{L_1} \right)$$

Sijoittamalla keskinäisinduktanssin arvoksi saadaan (9)

$$\Delta k = \frac{2,22 \text{ mH}}{2\sqrt{38,02 \text{ mH} \cdot 50,57 \text{ mH}}} \left( \frac{2 \cdot 1,91 \text{ mH}}{2,22 \text{ mH}} + \frac{0,83 \text{ mH}}{50,57 \text{ mH}} + \frac{0,35 \text{ mH}}{38,02 \text{ mH}} \right) = 0,044$$

$$k = 2,2 \text{ mH} * (38,02 \text{ mH} * 50,57 \text{ mH})^{-0,5} \pm 0,044 = 0,050 \pm 0,044 \approx \mathbf{0,05 \pm 0,04}.$$

## 4. Yhteenveto

Lopuksi voidaan todeta, että mittaukset eivät onnistuneet kondensaattorin kuusi kohdalla. Syy siihen saattaa olla kondensaattorin todellisen kapasitanssin ja ilmoitetun kapasitanssin merkittävä ero. Käämin 1 induktanssiksi saatiin kuitenkin noin 40 mH ja käämin kaksi induktanssiksi noin 50 mH. Tarkemmat arvot lyöytyvät kohdasta tulokset.

Keskinäisinduktanssiksi saatiin noin 2 mH, mutta sille virhekin oli noin 2 mH, joten tulos oli huono. Suuri virhe johtuu etenkin L+:n ominaistajuuden suurista vaihteluista, etenkin kondensaattorin 5:n kanssa mitattu arvon poikkeama muista. Saadusta kytkentäkertoimen arvosta voidaan päätellä että käämit olivat löyhästi kytkettyjä. Tässäkin arvossa oli melko suuri virhe.

### **Kirjallisuusviitteet:**

Classical and Modern Physics, International Edition, Kelle, Gettys, Skove  
Fysiikan Laboratoriotyöt, Jukka Vaari, Suomen Fyysikkoseura ry.

### **Liitteet:**

Mittauspöytäkirja